**Задачи многокритериальной дискретной оптимизации на графах.**

**1. Множества альтернатив**

Общей проблемой дискретных многокритериальных задач является нахождение множеств альтернатив. В совокупности этой проблемы рассматриваются вопросы оценки сложности нахождения множеств альтернатив, эффективности алгоритмов – точных и приближенных. В настоящем разделе уделено внимание нахождению хотя бы одного оптимального решения из множества альтернатив.

Приведем определения и обозначения, используемые в описании многокритериальных задач.

*Множество альтернатив* (*МА*) представляет собой множество всевозможных альтернативных решений задачи, включая оптимальные и около-оптимальные решения. Понятие МА является первичным понятием и вводится для нужд теории выбора и принятия решений. Понятие МА появилось вследствие необходимости принятия решения в условиях нескольких одновременных критериев. В этом случае возникает ситуация существования альтернативных решений, каждое из которых лучше другого хотя бы по одному критерию.

Аналогично однокритериальным оптимумам говорят о «многокритериальных оптимумах», которые встречаются в литературе под названиями парето-оптимальных, эффективных, недоминируемых и т.п. решений. Однако, в отличие от однокритериальной оптимизации нахождение одного конкретного «многокритериального» оптимума является непростым даже для частной задачи.

Процесс нахождения МА должен завершаться представлением элементов в том или ином виде. В теории выбора и принятия решений наиболее распространенными являются три способа:

1) перечисление всех конкурирующих альтернатив в явном виде;

2) представление элементов МА в неявном виде со помощью дополнительных систем ограничений;

3) построение детерминированного формального механизма, позволяющего генерировать альтернативы.

Принято говорить об *индивидуальной задаче*, если заданы все параметры векторной целевой функции и системы ограничений, описывающих множество допустимых решений (МДР). Если некоторые из этих параметров представлены в общем виде – принято говорить о *массовой задаче*, либо кратко, о *задаче*. Примерами массовых задач являются – задача о коммивояжере, задача об эйлеровых графах, транспортная задача и т.д.

Формально численным решением индивидуальной задачи является нахождение МА  из МДР. В широком смысле под *решением задачи* понимается построения определенного алгоритма, гарантирующего нахождение МА для всякой индивидуальной задачи массовой задачи.

*Оценка сложности нахождения МА.*

Применяется алгебраический подход к оценке вычислительной сложности, измеряемой количеством требуемых арифметических операций. При этом не учитывается представление дискретной структуры данных в ЭВМ, в силу чего не нужно исследовать выполнение операций в конкретной машине и стоимость цифровой длины чисел. Тем не менее, в силу разнообразия вычислительных платформ, в случае необходимости вводятся дополнительные уточнения. При этом для параллельных машин понятие временной сложности означает наибольшее суммарное время (измеряемое арифметическими операциями), затраченное одним из параллельных процессов.

Используется понятие асимптотической временной сложности. Сложность для почти всех индивидуальных задач является верхним ограничением сложности массовой задачи.

Возвращаясь к множествам альтернатив, рассматривается три вида альтернатив: *паретовское множество* (*ПМ*) , *полное множество альтернатив* (*ПМА*) и *лексикографическое множество альтернатив* (*ЛМА*)

Нахождение ЛМА в ряде случаев является более легкой проблемой по сравнению с нахождением ПМА. В случае использования распространенных методов – алгоритмов линейной свертки, то в классе этих алгоритмов проблема нахождения ПМА неразрешима в то время, как проблема нахождения ЛМА является разрешимой. В контексте алгоритмических проблем дискретной оптимизации ЛМА является одной из возможных аппроксимаций искомого ПМА.

Нахождение ЛМА для некоторых случаев является более легкой проблемой по сравнению с нахождением ПМА. Конкретнее, задачи неразрешимые с точки зрения нахождения ПМА, являются разрешимыми при поиске ЛМА. Таким образом, ЛМА представляется одним из возможных аппроксимаций ПМА, которое может быть значительно проще найти.

***Полные задачи и их множества альтернативных решений***

Говоря о задаче , будем подразумевать множество всех ее индивидуальных задач. Через множество  обозначаем множество допустимых решений задачи , полученное объединением МДР всех ее индивидуальных задач.

На предфрактальных графах являются верными следующие леммы теории многокритериальной оптимизации.

Утверждение 2.1.1. *При фиксированном  некоторые индивидуальные задачи из  могут быть полными, а другие задачи этого же семейства свойством полноты не обладают.*

Индивидуальные задачи одного семейства ,  имеют одинаковые определения допустимого решения, но различаются размерностью ВЦФ, составом критериев ВЦФ, количеством наборов весов и т.д.

Для полных задач облегчается исследование множеств альтернатив, для чего переносим известные теоремы теории графов на предфрактальные графы.

Теорема 2.1.1. *Всякая задача  об остовных лесах является полной, если ее ВЦФ содержит два или более весовых критериев.*

Теорема 2.1.2. *Всякая задача  о совершенных паросочетаниях является полной, если ее ВЦФ содержит два или более весовых критериев.*

Теорема 2.1.3. *Всякая задача  о совершенных паросочетаниях на двудольном предфрактальном графе, является полной, если ее ВЦФ содержит два или более весовых критериев.*

Теорема 2.1.4. *Всякая задача  о коммивояжере является полной, если ее ВЦФ содержит два или более весовых критериев.*

Остальные задачи требует отдельного анализа для выявления свойства полноты. Введем дополнительные обозначения:

 – конкретная ВЦФ, состав критериев которой полностью определен;

 – множество всех ВЦФ, у которых каждая из компонент представляет собой некоторый критерий из определенного перечня.

Многовзвешенный граф описывается следующим образом. Рассматривается предфрактальный граф , , каждому ребру  приписываются веса , . Множество всех весов обозначается , а -взвешенный предфрактальный граф .

Для многовзвешенных предфрактальных графов важной является следующая теорема [231].

Теорема 2.1.5. *Проблема нахождения ПМ  (ПМА ) типовой задачи  на многовзвешенном предфрактальном графе () неразрешима с помощью алгоритмов линейной свертки.*

Тем не менее алгоритмы линейной свертки можно использовать для нахождения нетривиальных МА, в частности ЛМА.

Теорема 2.1.6. *Проблема нахождения ЛМА типовой целочисленной задачи  при условии только весовых критериев на многовзвешенном предфрактальном графе () разрешима с помощью алгоритмов линейной свертки.*

**Постановка многокритериальной задачи на многовзвешенном графе**

Предлагается общая постановка многокритериальной задачи на предфрактальном графе. Предфрактальный граф  порожден множеством , ребрам ** приписано ,  действительных чисел , , где , ,  и .

На МДР : , **, ** задана ВЦФ:

, (2.2.1)

в которой критерии:

, , (2.2.2)

, , (2.2.3)

где  – операция над функцией вида max, min, sum.

Критерии  (2.2.2) называются метрическими критериями и являются функциями от весовых характеристик, а критерии  (2.2.3) – топологическими, построенными на основе топологических характеристик предфрактального графа.

Метрические критерии принимают вид:

, (2.2.4)

, (2.2.5)

, (2.2.6)

. (2.2.7)

Топологические критерии принимают вид:

, (2.2.8)

, (2.2.9)

, (2.2.10)

. (2.2.11)

Во множестве необходимо выделить элемент , экстремальный относительно векторной целевой функции  (2.2.1), или по-другому в  векторная целевая функция  принимает оптимальные значения по критериям  для всех .

В (2.2.2)-(2.2.11) записи  и  обозначают функции от весовых и топологических характеристик соответственно. В индивидуальных задачах количество критериев уточняется. При этом  наборы весов считаем несравнимыми, разного типа и над которыми нельзя осуществлять арифметические операции. Если допустить, что  наборы – одного типа и возможно осуществлять над ними арифметические операции, тогда наборы весов можно заменить одним весом, например, средним значением и, по сути, решать задачу с единственным набором весов.

**2. Задача покрытия графа простыми непересекающимися цепями**

***Постановка задачи***

Пусть ,  покрытие  простыми непересекающимися цепями. Всевозможные покрытия  на  образуют МДР . На множестве  определена ВЦФ:

 (2.6.1)

, , (2.6.2)

где  – суммарный вес множества  по -му набору весов;

, (2.6.3)

где  – число компонент ;

, (2.6.4)

где –  число цепей разного типа в ;

, (2.6.5)

где  – мощность компоненты ,  в .

Решение задачи включает в себя покрытия каждого из  наборов весов.

***Алгоритм покрытия -ранговыми цепями длины один***

Опишем применение алгоритма для одного фиксированного набора весов  из  и далее обобщим для каждого ‑го набора, .

Алгоритм  представляет собой работу алгоритма  для новой постановки задачи. При соблюдении условий существования требуется выделить СПМВ на **.

Следствие 2.6.1*Алгоритм*  *выделяет покрытие ‑ранговыми цепями длины один предфрактального графа .*

Следствие 2.6.2.*Алгоритм*  *выделяет покрытие ‑ранговыми цепями длины один* ,  *предфрактального графа .*

Теорема 2.6.1.*Алгоритм*  *выделяет покрытие ‑ранговыми цепями длины один*  *на предфрактальном графе , оцениваемое по критериям* , **,  *и *, *.*

Доказательство.

Критерий ,  минимизирует число компонент . Результатом работы алгоритма является совершенное паросочетание, состоящее из  связных компонент (ребер), что означает . Поскольку компоненты представляют ребра СПМВ на подграф-затравках , то число вершин компоненты равно двум вершинам ребра затравки, а критерий .

На выходе алгоритма получено СПМВ, в покрытии участвуют только ребра одного ранга **, тогда третий критерий **.

Общее количество ребер совершенного паросочетания равно . Сложение весов ребер составит общий вес :

**. ◄

***Алгоритм покрытия -ранговыми цепями длины два ребра***

Описывается использование алгоритма для одного набора весов  из  и далее обобщается для всех  набора.

Алгоритм  последовательно выделяет на затравках ,  покрытия простыми непересекающимися цепями длины два ребра, используя в качестве процедуры известный модифицированный алгоритм Эдмондса. Выделение покрытий на подграф-затравках **-го ранга соответствует выделению покрытия на . Предположим, что на подграф-затравках существует покрытие простыми непересекающимися цепями длины два, в противном случае результатом алгоритма  будет максимально возможное покрытие.

Следствие 2.6.3.*Алгоритм*  *выделяет покрытие ‑ранговыми цепями длины два предфрактального графа .*

Следствие 2.6.4.*Алгоритм*  *выделяет*  *покрытие ‑ранговыми цепями длины два ребра*  *на .*

Теорема 2.6.2.*Вычислительная сложность*  *равна .*

Доказательство.

Выделение СПМВ на затравке требует выполнения  операций. Поиск инцидентных ребер максимального веса, выбор цепей длиной три ребра составит  операций. Общее количество операций на затравке равно , а на всем графе ** . ◄

Теорема 2.6.3.*Алгоритм*  *выделяет покрытие ‑ранговыми цепями длины два*  *на предфрактальном графе , оцениваемое по критериям* , **,  *и *, *.*

Доказательство.

Количество цепей разной длины составляет критерий . Количество компонент на одной затравке -го ранга не более , а на всем предфрактальном графе равно .

Выделенное покрытие может включать ребра самых больших весов  или самых меньших , тогда весовые критерии оцениваются: **, . ◄

***Алгоритм покрытия -ранговыми цепями длины  ребер***

Предфрактальный граф  порожден множеством , где  кратно . Описывается алгоритм для одного набора весов и далее обобщается  набора.

Алгоритм ,  выделяет на отдельных подграф-затравках ,  покрытия простыми цепями длины . Общее покрытие соответствует покрытию всего предфрактального графа. Предполагается, что на подграф-затравках существуют покрытия простыми непересекающимися цепями длины , в противном случае результатом алгоритма  является максимально возможное покрытие цепями  минимального веса.

Следствие 2.6.5.*Алгоритм*  *выделяет покрытие ‑ранговыми цепями длины*  *предфрактального графа .*

Следствие 2.6.6.*Алгоритм*  *выделяет покрытие* ,  *‑ранговыми цепями длины*  *предфрактального графа .*

Теорема 2.6.4.*Вычислительная сложность*  *равна* *.*

Доказательство.

Алгоритм  осуществляет многократное выполнение процедуры покрытия цепями каждой подграф-затравки, а их общее количество . В случае  на подграф-затравке выделяется одна цепь, которая проходит через все вершины , что соответствует выделению гамильтоновой цепи. Вычислительная сложность алгоритма выделения гамильтоновой цепи на одной затравке равна **, а на графе  составит . ◄

Теорема 2.6.5.*Алгоритм*  *выделяет покрытие ‑ранговыми цепями длины*  *на предфрактальном графе , оцениваемое по критериям* , **,  *и *, *.*

Доказательство.

В покрытии присутствуют цепи одинаковой дины , тогда критерий . Число компонент на затравке равно , на всем графе по количеству затравок  равно . Весовые критерии **,  оцениваются через ребра самых больших весов  или самых меньших : **, . ◄

***Алгоритм покрытия -ранговыми непересекающимися цепями***

Множество алгоритмов  решает многокритериальную задачу покрытия простыми непересекающимися цепями предфрактального графа. В качестве обобщенного алгоритма используем обозначение . Отметим, что множество алгоритмов  может быть расширено добавлением новых алгоритмов.

Теорема 2.6.6.*Алгоритм*  *выделяет покрытие простыми непересекающимися цепями* *,  предфрактального графа  для всех* *.*

Доказательство.

Для каждого алгоритма из множества алгоритмов  получены доказательства теорем о выделении покрытия простыми непересекающимися цепями.